

Fizyka z elementami fizyki radiacyjnej

Lista 2. Matematyczność przyrody. Elementy rachunku wektorowego, różniczkowego i całkowego

Wektory

- 1) Do tkanki wpada foton o wektorze pędu:

$$\vec{p}_1 = (2, 0, 0) \text{ keV}/c$$

a po rozproszeniu Comptona wychodzi z wektorem:

$$\vec{p}_2 = (1, 1, 0) \text{ keV}/c$$

- a) Oblicz kąt między tymi wektorami.
b) Oblicz zmianę wektora pędu $\Delta \vec{p}$.
c) Wyznacz jego długość.
- 2) Cztery psy – Azor, Burek, Ciapka i Dingo – jednocześnie ciągną zabawkę, każdy w swoją stronę. Burek ciągnie ją pod kątem $\alpha_{AB} = 60^\circ$ względem Azora, Ciapka pod kątem $\alpha_{BC} = 120^\circ$ względem Burka, a Dingo pod kątem $\alpha_{CD} = 90^\circ$ względem Ciapki. Azor, Burek i Ciapka ciągną zabawkę siłami o wartościach odpowiednio: $F_A = 20 \text{ N}$, $F_B = 40 \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ N}$, $F_C = (20 + 20 \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ N}$. Aby zabawka pozostała nieruchoma, wektor działającej na nią siły wynikowej musi być wektorem zerowym.
- a) Z jaką siłą ciągnie Dingo?
b) Jeśli Azor i Dingo będą dalej ciągnąć zabawkę tak samo, a Burek ją puści, to jaki będzie kierunek i wartość siły wywieranej przez Ciapkę, by nie stracił zabawki?

Iloczyn skalarny i wektorowy

- 3) Ramię wysięgnika jest przesuwane wzdłuż prostej x na odległość 2 m . W tym celu przyłożono siłę o wektorze $\vec{F} = (2, 1) \text{ N}$. Wyznacz pracę, jaką wykonano zgodnie ze wzorem: $W = \vec{r} \cdot \vec{F}$, gdzie $\vec{r}$ jest wektorem przemieszczenia.
- 4) Proton o ładunku $1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ porusza się z prędkością:

$$\vec{v} = (2 \cdot 10^6, 0, 0) \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

w polu magnetycznym aparatu MRI:

$$\vec{B} = (0, 0, 1.5) \text{ T}.$$

- a) Oblicz wektor siły Lorentza:
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

b) Wyznacz kierunek działania tej siły.
- 5) Lampa rentgenowska obraca się wokół pacjenta z prędkością kątową:
- $$\vec{\omega} = (0, 10, 0) \text{ rad/s}$$
- a jej promień względem osi obrotu:
- $$\vec{r} = (1, 0, 0) \text{ rad/s}$$
- a) Oblicz wektor prędkości lampy
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

b) Określ kierunek wektora $\vec{v}$
c) Wyznacz wartość prędkości.

- 6) Do lądowania podchodzą trzy śmigłowce. Prędkość pierwszego opisuje wektor $\vec{v}_1 = (20, 0, -20) \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a drugiego $\vec{v}_2 = (0, 20, -20) \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wyznacz wektor prędkości trzeciego śmigłowca, jeśli jego prędkościomierz wskazuje $|v_3| = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a jego trajektoria jest prostopadła do pozostałych śmigłowców.

Pochodne i całki

- 7) Samochód porusza się po prostej według równania:

$$x(t) = t^2 \cdot 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + t \cdot 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- a) Wyznacz prędkość chwilową $v(t)$.
b) Wyznacz przyspieszenie a w chwili $t = 5 \text{ s}$.
- 8) Pewna powierzchnia ogrzewana jest lampą. Z obserwacji wynika, że ewolucję temperatury tej powierzchni można opisać równaniem:

$$T(t) = 320 \text{ K} - 20 \text{ K} \cdot e^{-t \cdot 0.1 \frac{1}{\text{s}}}$$

- a) Wyznacz szybkość zmiany temperatury w chwili $t = 1 \text{ s}$.
b) Po jakim czasie szybkość zmian temperatury spadnie poniżej $1 \frac{\text{K}}{\text{min}}$.
- 9) Sieć energetyczna zasilana jest prądem przemiennym. Napięcie w takiej sieci zmienia się zgodnie z równaniem

$$V(t) = V_0 \cdot \sin(\omega t)$$

gdzie V_0 to amplituda napięcia, a ω to częstość kołowa zmian.

- a) Wyznacz szybkość zmian napięcia w czasie.
b) W których chwilach zmiany napięcia są najwolniejsze?
- 10) Przyspieszenie ruszającego ze światła samochodu wynosi $a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.
- a) Jaka jest zależność prędkości od czasu $v(t)$?
b) Jaką drogę przejedzie samochód pomiędzy chwilami $t_1 = 2 \text{ s}$ i $t_2 = 5 \text{ s}$?
- 11) Natężenie prądu¹ w obwodzie pewnego urządzenia opisuje równanie

$$I(t) = 100 \text{ mA} \cdot \sin\left(t \cdot 100\pi \frac{1}{\text{s}}\right)$$

Jaki jest całkowity ładunek elektryczny q , który przepływnie w czasie $t \in \left[\frac{1}{200}, \frac{2}{200}\right] \text{ s}$?

¹ Natężenie prądu elektrycznego, to stosunek wartości ładunku elektrycznego, który przepływa przez

wyznaczoną powierzchnię, do czasu przepływu tego ładunku $I = \frac{q}{t} \left[1 \text{ A} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ s}} \right]$.

- 12) Powierzchnia z zadania 8 po wyłączeniu lampy zaczyna stygnąć. Energia cieplna stygnącej powierzchni oddawana jest do otoczenia z mocą² $P(t)$, zmieniającą się w czasie zgodnie z równaniem:

$$P(t) = 2 \text{ W} \cdot e^{-\frac{t}{10 \text{ s}}}$$

- Jaka energia zostanie oddana w ciągu pierwszych dziesięciu sekund stygnięcia?
- Jaka energia zostanie oddana między $t_2 = 10 \text{ s}$, a $t_3 = 20 \text{ s}$?

Macierze

- 13) W tomografii komputerowej (CT) komputer przetwarza obraz przekroju pacjenta. Załóżmy, że mamy punkt obrazu o współrzędnych:

$$P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podczas rekonstrukcji obraz trzeba obrócić o kąt $\theta = 90^\circ$ wokół środka układu współrzędnych. Macierz obrotu w 2D ma postać:

$$\hat{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- Zapisz macierz obrotu $\hat{R}(-90^\circ)$.
- Oblicz współrzędne punktu P' po obrocie:

$$P' = \hat{R}P.$$

- 14) Rozważamy fragment kości poddany obciążeniu. Dla uproszczenia przyjmujemy model liniowo-sprężysty, opisany prawem Hooke'a w dwóch wymiarach (wzdłuż i poprzek kości).

Związek między wektorem naprężeń $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) \text{ GPa}$ a wektorem odkształceń $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$ opisuje równanie:

$$\vec{\sigma} = \hat{C} \vec{\varepsilon}$$

Gdzie $\hat{C} = \{C_{ij}\}$ to macierz sztywności.

Macierz sztywności kości można zapisać w postaci:

$$\hat{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

- Oblicz macierz sztywności dla: $E = 18 \text{ GPa}$ i $\nu = 0,3$.
- Wyznacz wektor naprężeń, jeśli $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1$, $\varepsilon_{xy} = 0$.

Zapamiętaj:

- Operacje na wektorach oraz macierzach.
- Sens fizyczny i metody obliczania pochodnych. Własności pochodnych. Wzory na pochodne funkcji elementarnych (wielomian x^n , $\sin x$, $\cos x$, e^x itp.).
- Sens fizyczny i metody obliczania całek oznaczonych i nieoznaczonych. Własności całek, Wzory na całki funkcji elementarnych.

² Moc to wielkość fizyczna określająca zmianę energii w jednostce czasu $P = \frac{\Delta E}{t}$, $[1 \text{ W} = \frac{1 \text{ J}}{1 \text{ s}}]$